Тәжірибелік сабақ 1

Бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер және оның шешуі. Коши есебі

Біртексіз сызықты теңдеуді қарастырайық:

$$f_1(x_1,..x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1}+...+f_n(x_1,..x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}=g(x_1,...,x_n,u) \quad (1)$$

Мұндағы, f_i - функциялары кейбір $D\subset R^n$ облысында үздіксіз дифференциалданатын және бәрі бірдей нөлге айналмайтын функциялар деп есептелінеді.

Бұл теңдеуді біртекті сызықты түрге келтіру арқылы интегралдайды. Ол үшін шешімді айқындалмаған функция түрінде іздейді:

$\nu(x_1\ldots x_n)=0$ (2)

Мұндағы, ν - функциясын D облысында үздіксіз дифференциалданатын және $\frac{\partial \nu}{\partial u}\neq 0$ деп аламыз. Осы қатынасты кез келген x_i бойынша дифференциалдайық:

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}+\frac{\partial v}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_i}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=-\frac{\frac{\partial v}{\partial x_i}}{\frac{\partial v}{\partial u}}=0,\ (i=1,..n) \quad (3)$$

(3) өрнекті (1) теңдеуге қойып, оны - $\frac{\partial \nu}{\partial u}$ бөлшегіне көбейтсек,

$$f_1(x_1,..x_n)\frac{\partial v}{\partial x_1}+...+f_n(x_1,..x_n)\frac{\partial v}{\partial x_n}+g(x_1,...,x_n,u)\frac{\partial v}{\partial v}=0$$

тендеуін аламыз. Бұл *v* бойынша біртекті сызықты тендеу. Сондықтан, алдыңғы пунктте көрсетілген тәсілді қолданамыз. Бүл теңдеудің сэйкес сипаттаушы жүйесі

$$\frac{dx_1}{f_1(x_1,..x_n)}=\frac{dx_2}{f_2(x_1,..x_n)}=...=\frac{dx_1}{f_n(x_1,..x_n)}=\frac{du}{g(x_1,..x_n)}$$

түрінде жазылады. Бұл жүйенің өзара тәуелсіз интегралдары n - ге тең:

$\varphi_1(x_1,..., x_n, u)$, … , $\varphi_n(x_1,..., x_n, u)$

Бұл жағдайда (1) теңдеудің жалпы шешімі

$u=\Phi(\varphi_1,..., \varphi_n)$

түрінде жазылады. Шешімді анықталмаған түрде іздеп отырғанымызды ескерсек,

$\Phi(\varphi_1(x_1,\ldots x_n), \varphi_2(x_1,\ldots x_n, u),..., \phi_n(x_1..x_n, u)) = 0$

қатынасын аламыз. Осындағы u -ды $x_1,\ldots x_n$ арқылы өрнектеуге мүмкін болса, ол функция (1) теңдеудің шешімі болады.

Бұл жерде арнайы шешімдер де болуы мүмкін. Ондай шешімдер сол уақытта пайда болады, егер (2) тепе-теңдік тек $u=\varphi_1(x_1,..., x_n)$ болғанда ғана орындалса.

Біртекті және біртексіз сызықты теңдеулер үшін Коши есебі былай қойылады: теңдеудің шешімдерінің ішінен оның бір аргументі тұрақталған жагдайда белгіді бір $n - i$ - өлшемді бетке айналатын дербес шешімді анықтау керек, яғни $u=\varphi_1(x_1,...,x_n)$ шешімінің $x_n=x^\circ_n$ болғанда белгілі $\alpha(x_1,...,x_{n-1})$ функциясына тең болатын шешімді табу керек. Мұны қысқаша

$$u\Big|_{x_n=x_n^0}=\alpha(x_1..x_n$$

түрінде жазады.

Мысалы, екі өлшемді дербес туындылы

$$P\frac{\partial z}{\partial x}+Q\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

теңдеуі үшін Коши есебі былай қойылады : $z=\varphi(x,y)$ шешімінің $x=x_0$ болғанда $z=\alpha$ (у) шартын қанағаттандыратын шешімді іздеу. Ол барлық интегралдық беттердің ішінен $z=\alpha$ (у) қисығы арқылы өтетін бетті табу болып есептелінеді.

Жалпы жағдайда Коши есебінің шешімін табу қиындық тудырмайды. **Мысал1.** $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0$ теңдеуінің жалпы шешімін табайық. Сәйкес сипаттаушы симметрия жүйесін құрайық:

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$$

Осыдан

$$\varphi_1=\frac{y}{x}=C_1,\varphi_2=\frac{z}{x}=C_2$$

интегралдарын табамыз. Бұл жағдайда жалпы шешім

$$u=\Phi(\frac{y}{x},\frac{z}{x})$$

түрінде жазылады. Дифференциалдау арқылы бұл функцияның шешім болатынына көз жеткізу оңай.